

Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind

Von F. SZÁSZ in Budapest

Professor Béla Szőkefalyi-Nagy zu seinem 50. Geburtstag gewidmet

Der Zweck dieser Arbeit ist die Bestimmung aller im Titel genannten Halbgruppen. Das analoge ringtheoretische, aber viel zusammengesetztere Problem habe ich früher behandelt [5]. Bezüglich weiterer ähnlicher Untersuchungen vgl. man etwa [1], [3], [4] und [6].

Eine Halbgruppe H werde eine Ω -Halbgruppe genannt, wenn sämtliche endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale von H sind.

Wir haben also alle Ω -Halbgruppen zu bestimmen.

Es wäre interessant auch alle Halbgruppen, deren Teilhalbgruppen Rechtsideale sind, explicit zu beschreiben. (Vgl. bezüglich der Hamiltonschen Gruppen die Arbeit [1] und bezüglich der entsprechenden Ringe die Arbeiten [3] und [4].)

Bezüglich der nötigen Begriffe der Algebra verweisen wir z. B. auf das Buch [2] von L. RÉDEI. $\{\dots\}$ bezeichnet die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Teilhalbgruppe einer Halbgruppe.

Alle Ω -Halbgruppen bestehen aus höchstens vier Elementen und zwar gilt der

Satz. *Die untereinander nichtisomorphen Ω -Halbgruppen sind die folgenden:*

1. $\{a\}$ mit $a^2 = a$;
2. $\{a\}$ mit $a^3 = a^2$;
3. $\{a\}$ mit $a^4 = a^3$;
4. $\{a, b\}$ mit $a^2 = ab = a, b^2 = ba = b$;
5. $\{a, b\}$ mit $a^3 = a^2 = b^3 = b^2 = ab = ba$;
6. $\{a, b\}$ mit $a^4 = a^3 = b^4 = b^3 = ab = ba$;
7. $\{a, b\}$ mit $a^4 = a^3 = b^4 = b^3 = ab, a^2 = b^2 = ba$;
8. $\{a, b\}$ mit $a^4 = a^3 = b^4 = b^3, a^2 = b^2 = ab = ba$.

Offenbar ist sowohl jede Teilhalbgruppe, als auch jedes homomorphe Bild einer Ω -Halbgruppe ebenfalls eine Ω -Halbgruppe. Ferner gibt es in jeder Ω -Halbgruppe zu beliebigen Elementen a_1, a_2, \dots, a_n , die eine echte Teilhalbgruppe erzeugen, ein weiteres Element b mit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = b \cup bH = \{b\}$, also läßt sich jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe einer Ω -Halbgruppe schon durch ein Element erzeugen. Daher sind die Ω -Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ im Sinne von L. RÉDEI [2]. Bei unserer Untersuchung über die

Ω -Halbgruppen wird aber der Satz von L. RÉDEI [2] über die einstufig nichtkommutativen endlichen Halbgruppen nicht benützt.

Wir brauchen den folgenden

Hilfssatz. Damit in einem potenzenassoziativen Gruppoid G alle Teilgruppoiden Rechtsideale sind, ist notwendig und hinreichend, daß für beliebige Elemente a, b von G eine Gleichung von der Form $ab = a^j$ ($j = 1, 2$ oder 3) gilt. Hieraus folgt $a^{l+1} = a^l$ ($l = 1, 2$ oder 3).

Beweis. Ist jedes Teilhalbgruppoid des Gruppoides G ein Rechtsideal, so erhält man $a^2 \cdot a = a^3 \in \{a^2\}$, also $a^3 = a^{2k}$ für eine natürliche Zahl k . Es seien nun m und n für $a \in G$ möglichst klein gewählt, derart, daß $a^m = a^n$ mit $0 < m < n$ erfüllt ist. Dann sind die Elemente $a, a^2, \dots, a^m, \dots, a^{n-1}$ voneinander verschieden. Ferner ist das Element $e = a^{m(n-m)}$ idempotent (vgl. z. B. RÉDEI [2], Seite 51). Da $e = a^l$ für ein l mit $1 \leq l \leq n-1$ idempotent ist, gilt $\{e\} = e$, und da jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist, gewinnen wir $eb = e$ für jedes $b \in G$. Also gilt auch $a^{l+1} = a^l$. Eine leichte Überlegung liefert nun die Beziehung $m = l < l+1 = n$, woraus wegen $a^3 = a^{2k}$ und wegen der Minimalität von $m = l$ auch $l \leq \min(3, 2k)$, also $l \leq 3$ folgt. Deshalb muß gewiß $a^4 = a^3$ und auch $ab = a^j$ für jedes $a, b \in G$ mit einem Exponenten $j (\leq 1, \leq 3)$ bestehen. Die weiteren Behauptungen sind trivial. Somit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes. Es genügt zu zeigen, daß jede Ω -Halbgruppe H einer im Satz vorkommenden Halbgruppe isomorph ist. Andererseits sind nämlich die im Satz erwähnten Halbgruppen offenbar Ω -Halbgruppen. Im folgenden sei also H eine Ω -Halbgruppe.

I. Zuerst bestimmen wir die durch ein Element erzeugten Ω -Halbgruppen.

Nach dem Hilfssatz gilt für $H = \{a\}$ gewiß $a^{l+1} = a^l$ mit $l = 1, 2$ oder 3 . In allen drei Fällen wirkt hierbei a^l als das (multiplikative) Nullelement von H . Somit erhält man die im Satz bei 1., 2. und 3. erwähnten Halbgruppen.

Unter II–VII bestimmen wir die durch zwei, aber nicht durch ein Element erzeugten Ω -Halbgruppen.

II. Ist $H = \{a, b\}$ eine Ω -Halbgruppe, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^2 = b$, so ergibt sich $ab = a$ und $ba = b$, also der im Satz bei 4. erwähnte Fall.

Für diesen Fall ist nichts zu beweisen.

III. Ist $H = \{a, b\}$ eine Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^3 = b^2$, so ist $\{a, b\}$ keine Ω -Halbgruppe.

Zum Beweis nehmen wir an, daß H eine Ω -Halbgruppe ist, und bilden die echte Teilhalbgruppe $S = \{a, b^2\}$ von $\{a, b\}$, wobei wegen $(b^2)^2 = b^2$, $a^2 = a$, $ab^2 = a$, $b^2a = b^2$ jedes Element von S idempotent ist, weil jede Teilhalbgruppe ein Rechtsideal von H ist. Dann gelten $S = \{s\}$, $s^2 = s$ und somit $a = b^2$, woraus $H = \{b\}$ folgt, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $H = \{a, b\}$ keine Ω -Halbgruppe, w. z. b. w.

IV. Ist $H = \{a, b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^2 = a$ und $b^4 = b^3$, so ist $H = \{a, b\}$ ebenfalls keine Ω -Halbgruppe.

Ist nämlich $H = \{a, b\}$ unter den erwähnten Voraussetzungen eine Ω -Halbgruppe, so gilt wegen $\{a, b^3\} \neq \{a, b\}$ auch $S = \{a, b^3\} = \{s\}$, $s^2 = s$. Hieraus folgt

$a = b^3 \in \{b\}$ und $\{a, b\} = \{b\}$, was unmöglich ist. Daher ist $\{a, b\}$ keine Ω -Halbgruppe, w. z. b. w.

V. Ist $H = \{a, b\}$ eine Ω -Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3 = a^2$ und $b^3 = b^2$, so erhält man $ab = ba = a^2 = b^2$, also den im Satz bei 5. erwähnten Fall.

Die Untersuchung von $S = \{a^2, b^2\}$ liefert nämlich $S = \{s\}$, $a^2 b^2 = a^2$, $b^2 a^2 = b^2$, woraus wegen $s^2 = s$ auch $a^2 = b^2$ folgt. Ist nun $ab = a$, so erhält man $ab^2 = a$, also $a = a^2 = b^2 \in \{b\}$ und $H = \{b\}$, was wegen der Voraussetzung unmöglich ist. Daher gilt gewiß $ab = a^2$ und ähnlich auch $ba = b^2$, w. z. b. w.

VI. Ist $H = \{a, b\}$ eine beliebige Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^3 = a^2$ und $b^4 = b^3$, so ist H keine Ω -Halbgruppe.

Ist nämlich $H = \{a, b\}$ eine Ω -Halbgruppe, so gilt für $S = \{a^2, b^3\}$ wegen $S \neq H$ gewiß $S = \{s\}$ mit $s^2 = s$, denn man erhält $a^2 b^3 = a^2$ und $b^3 a^2 = b^3$. Daher ist $a^2 = b^3$. Da $T = \{a, b^2\} \neq \{a, b\}$ ist, gewinnen wir $T = \{t\}$ mit entweder $t \in \{a\}$ oder $t \in \{b^2\}$ folglich $|T| \leq 2$. Deshalb ergibt sich $a \in \{b^2\}$ und $\{a, b\} = \{b\}$, was ausgeschlossen ist. Daher ist $H = \{a, b\}$ tatsächlich keine Ω -Halbgruppe, w. z. b. w.

VII. Ist $H = \{a, b\}$ eine Ω -Halbgruppe, die nicht durch ein Element erzeugt werden kann, gelten ferner $a^4 = a^3$ und $b^4 = b^3$, so gewinnen wir die im Satz bei 6., 7. oder 8. erwähnten Fälle.

Aus der Untersuchung von $S_1 = \{a^3, b^3\}$ folgt nämlich, mit ähnlichen Methoden, wie in V bzw. VI, daß $a^3 = b^3$ gilt. Ferner läßt sich nach der Untersuchung der echten Teilhalbgruppe $S_2 = \{a, b^2\}$ auch $b^2 \in \{a\}$ bestätigen, denn sonst erhielte man $|S_2| \geq 4$ für $S_2 = \{s_2\}$, was wegen I unmöglich ist.

Jetzt sind neun weitere Unterfälle möglich, unter denen nur drei Unterfälle wirklich vorkommen werden: $ab = a^j$, wobei $j = 1, 2$ oder 3 , ferner $ba = b^k$, wobei $k = 1, 2$ oder 3 gelten. Im Falle $j = 1$ ergibt sich $a^3 = a^4 = ab^3 = a$, was unmöglich ist. Daher gilt $j \neq 1$, und ähnlich auch $k \neq 1$. Da die Halbgruppen $\{a, b\}$, die den Fällen $(j, k) = (2, 3)$ und $(j, k) = (3, 2)$ entsprechen, untereinander isomorph sind, gewinnen wir für diese Fälle gleichzeitig die im Satz bei 7. vorkommende Halbgruppe. Im Unterfalle $(j, k) = (2, 2)$ erhält man die im Satz bei 8. erwähnte Halbgruppe und im Falle $(j, k) = (3, 3)$ die im Satz bei 6. vorkommende Halbgruppe. Daher liefern diese neun Möglichkeiten für (j, k) wirklich nur drei nicht-isomorphe Halbgruppen, und zwar die im Satz bei 6., 7. und 8. betrachteten Halbgruppen, w. z. b. w.

VIII. Jetzt beweisen wir, daß jede Ω -Halbgruppe H entweder durch ein Element oder durch zwei Elemente erzeugt werden kann.

Läßt sich nämlich die Ω -Halbgruppe H durch keine ihrer endlichen Teilmengen erzeugen, so kann aus jedem unendlichen erzeugenden System a_1, a_2, a_3, \dots von H eine abzählbar unendliche Teilmenge b_1, b_2, b_3, \dots ausgewählt werden, derart, daß $b_{j+1} \notin \{b_1, b_2, \dots, b_j\}$ für jedes $j = 1, 2, 3, \dots$ gilt. Es sei nun $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Dann gilt wegen der Definition der Folge b_1, b_2, b_3, \dots einerseits $|B| \geq 4$, andererseits wegen I und wegen $B \neq H$, $B = \{b\}$ gewiß $|B| \leq 3$, was aber ein Widerspruch ist. Also läßt sich H schon durch endlich viele Elemente erzeugen. Es sei m das Minimum derjenigen natürlichen Zahlen n , für welche wenigstens ein aus genau n Elementen bestehendes erzeugendes System der Halbgruppe H existiert. Dann gibt es Elemente $c_1, c_2, \dots, c_m \in H$ mit $H = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ und mit $S = \{c_2, \dots, c_m\} \neq$

$\neq H$, denn m ist minimal gewählt. Da H eine Ω -Halbgruppe ist, erhält man wegen $S = \{s\}$ gewiß $H = \{c_1, S\} = \{c_1, s\}$, folglich $m \leq 2$, w. z. b. w.

Somit haben wir den Satz bewiesen.

Jetzt betrachten wir noch eine Klasse von Halbgruppen.

Eine Halbgruppe H wird eine Ω -Halbgruppe genannt, wenn jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe S von H in der Gestalt hH ($h \in H$) dargestellt werden kann.

Es wird sich unter anderem herausstellen, daß jede Ω' -Halbgruppe eine Ω -Halbgruppe ist.

Wegen $hH \subseteq \{h\}$ sind die Ω' -Halbgruppen entweder kommutativ, oder einstufig nichtkommutativ. Ferner sind die echten, endlich erzeugbaren Teilhalbgruppen S einer Ω' -Halbgruppe H wegen $hH \subseteq \{h\}$ und wegen des Hilfssatzes höchstens von der Mächtigkeit drei. Ähnlich dem Beweisschritt VIII über die Ω -Halbgruppen kann bewiesen werden, daß auch jede Ω' -Halbgruppe endlich ist.

Ist eine Ω' -Halbgruppe durch ein Element erzeugbar, so ist sie einer im Satz bei 1., 2. oder 3. erwähnten Halbgruppe isomorph.

Läßt sich aber eine Ω' -Halbgruppe nicht durch ein Element erzeugen, so ist sie durch zwei Elemente erzeugbar, wie diese Tatsache dem Schritt VIII ähnlich einzusehen ist.

Wir betrachten jetzt diejenigen Ω' -Halbgruppen $H = \{a, b\}$, die sich nicht durch ein Element erzeugen lassen. Es sei $M = mH$ ($m \in H$) eine beliebige maximale Teilhalbgruppe von H . Dann erhält man $mH \subseteq \{m\}$, also $mH = \{m\} \neq H$ und $mh = m$ ($h \in H$). Dann besteht die Teilhalbgruppe $S = m\{h\}$ aus dem einzigen idempotenten Element $m \in H$, womit $|M| = 1$ bewiesen ist. Es seien jetzt $x \in H$ ein beliebiges Element mit $x \neq m$ und $\{y\}$ eine maximale Teilhalbgruppe von H mit $x \in \{y\}$. Nach den Vorigen gelten dann $\{x\} = \{y\}$, $|\{y\}| = 1$ und $H = \{m, x\}$, wobei offenbar $m^2 = mx = m$ und $x^2 = xm = x$ bestehen. Das ist der im Satz bei 4. vorkommende Fall. Umgekehrt sind diese Halbgruppen Ω' -Halbgruppen.

Damit ist bewiesen:

Alle Ω' -Halbgruppen sind die im Satz bei 1—4. aufgezählten Ω -Halbgruppen.

Literatur

- [1] R. BAER, Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg*, 2 (1933), 12—17.
- [2] L. RÉDEI, *Algebra I* (Leipzig, 1959).
- [3] L. RÉDEI, Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math.*, 56 (1952), 89—95.
- [4] L. RÉDEI, Vollidealringe im weiteren Sinne I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1962), 243—268.
- [5] F. SZÁSZ, Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13 (1962), 115—132.
- [6] F. SZÁSZ, Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közleményei*, 5 (1960), 287—297.

(Eingegangen am 3. August 1962, in veränderter Form am 10. Juli 1963)